Journal of Geometry and Physics 13 (1994) 139–157
North-Holland

JOURNAL OF GEOMETRY AND PHYSICS

G-espaces K-symplectiques homogènes

A. Awane

Université Hassan II, Faculté des Sciences II, Département de Mathématiques, B.P. 7955, Ben Msik - Sidi Othmane, Casablanca, Maroc
et Université de Haute Alsace, Faculté des Sciences et Techniques, Laboratoire de Mathématiques, 4, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse Cedex, France

Reçu le 11 février 1992
(Revisé le 13 avril 1993)

We generalize the Kirillov orbit method for k-symplectic structures. We also develop the notion of moment map related with these structures and give some properties.

Keywords: *Lagrangian foliation, symplectic structure, geometric quantization*
1991 MSC: 58 F 05, 58 F 06

1. Introduction

Une structure k-symplectique sur une variété différentiable M de dimension $n(k+1)$ est un $(k+1)$-uplet $(\omega^1, ..., \omega^k; E)$ dans lequel E est un sous-fibré de TM intégrable de codimension n et $\omega^1, ..., \omega^k$ sont des deux-formes fermées s'annulant sur les sections de E et dont les sous-espaces caractéristiques sont transverses.

Ceci généralise, dans le cadre des systèmes extérieurs, la notion de structure symplectique où l'on a mis en évidence un feuilletage lagrangien (ce qui correspond à la notion de polarisation réelle au sens de Molino [12]). Des généralisations quelque peu analogues avaient déjà été proposées; citons par exemple celle de Nambu pour modéliser une certaine mécanique statistique, le modèle donné par Yaglom relatif aux équations de l'optique de Hamilton.

L'approche linéaire et algébrique des structures k-symplectiques a été faite dans la réf. [2]. On s'interesse surtout dans ce papier à l'existence de ces structures sur des variétés en commençant par le cas invariant et l'étude des espaces homogènes. Ceci conduit à donner une généralisation de la quantification géométrique de Kostant–Souriau.

Soit donc une variété M munie d'une structure k-symplectique, un groupe de Lie connexe G laissant cette structure invariante. La variété M est alors appelée G-espace k-symplectique. Si l'action sur M est de plus effective et munit M d'une

SSDI 0390-0440(93)E0029-O

structure d'espace homogène k-symplectique, alors, si $\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre de Lie de G on démontre:

1. Les éléments X de $\mathfrak{g}$ dont les champs fondamentaux X_M sont des sections de E forment une algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{h}^{(E)}$ tel qu'en chaque point x_0 de M, l'espace tangent au feuilletage sous-jacent à E en x_0 est formé par les vecteurs $X_M(x_0)$ pour lesquels X appartient à $\mathfrak{h}^{(E)}$.

2. A un G-espace k-symplectique strict M sont associés des cocycles $\beta^1, \ldots, \beta^k$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathbb{R}$ tels que:

(i) Si $\beta^1, \ldots, \beta^k$ sont des cobords, alors M est un G-espace hamiltonien.

(ii) Si l'une au moins des classes de cohomologie $[\beta^a]$ est non nulle, il existe un groupe de Lie connexe et simplement connexe $\tilde{G}_\beta$ tel que M soit un $\tilde{G}_\beta$-espace hamiltonien. Lorsque $M=\mathbb{R}^{n(k+1)}$ et G est le groupe additif $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ agissant sur M par translations, les classes $[\beta^1], \ldots, [\beta^k]$ correspondantes ne sont pas toutes nulles et le groupe $\tilde{G}_\beta$ est le groupe de Heisenberg d'ordre k au sens de Goze et Haraguchi [5].

3. Toute G-orbite coadjointe $O=G\cdot J(x)$ $(x\in M)$ est munie d'une structure canonique de variété k-symplectique.

4. L'application moment $\tilde{J}$ est différentiable, équivariante et définit un revêtement de M sur une G-orbite coadjointe $O=G\cdot J(x)$ $(x\in M)$, en plus, elle échange les structures k-symplectiques de ces deux variétés.

2. G-espaces k-symplectiques

Soient M une variété différentiable de dimension $n(k+1)$ munie d'un feuilletage $\mathfrak{F}$ de codimension n et $\omega^1, \ldots, \omega^k$ des deux-formes différentielles fermées dont les sous-espaces caractéristiques en tout point x de M seront désignés par $C_x(\omega^a)$ [4].

Le sous-fibré de TM défini par les vecteurs tangents aux feuilles de $\mathcal{F}$ sera désigné par E, l'ensemble des sections du M-fibré $TM\to M$ (resp. $E\to M$) sera désigné par $\mathcal{X}(M)$ (resp. $\Gamma(E)$) et l'ensemble des p-formes différentielles sur M sera désigné par $\mathfrak{A}^p(M)$.

Sauf mention du contraire, la variété M sera supposée connexe et paracompacte, et tous les éléments introduits sont supposés de classe C^∞.

On suppose que le $(k+1)$-uplet $(\omega^1, \ldots, \omega^k; E)$ définit une structure k-symplectique sur M, c'est-à-dire que pour tout point x de M les propriétés suivantes sont satisfaites:

$$C_x(\omega^1)\cap\cdots\cap C_x(\omega^k)=(0)\ , \tag{2.1}$$

$$\forall a\ (a=1, \ldots, k)\ ,\quad \forall X, Y\in\Gamma(E)\ ,\quad \omega_x^a(X_x, Y_x)=0\ . \tag{2.2}$$

Rappelons [2] que dans ces conditions il existe au voisinage de tout point de M un système de coordonnées locales dites adaptées (x^{a_s}, x^s), $1\leqslant a\leqslant k$, $1\leqslant s\leqslant n$ tel que les formes ω^a soient représentées par

$$\omega^a = \sum_{s=1}^{n} \mathrm{d}x^{a_s} \wedge \mathrm{d}x^s .$$

Un champ de vecteurs X sur M est un automorphisme infinitésimal de $\mathfrak{F}$ si au voisinage de tout point de M le groupe à un paramètre local associé à X respecte le feuilletage $\mathfrak{F}$.

On désigne par $\mathscr{L}(M, \mathfrak{F})$ l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de $\mathfrak{F}$.

Un automorphisme infinitésimal de $\mathfrak{F}$ sera appelé système hamiltonien si les formes de Pfaff $i(X)\omega^1, ..., i(X)\omega^k$ sont fermées.

Il résulte de la définition de la dérivée de Lie que pour qu'un automorphisme infinitésimal X de $\mathfrak{F}$ soit un système hamiltonien il est nécessaire et suffisant que $\pounds_X\omega^1 = \cdots = \pounds_X\omega^k = 0$.

Soit j l'application $X \mapsto (i(X)\omega^1, ..., i(X)\omega^k)$ de $\mathscr{X}(M)$ dans $\mathfrak{A}^1(M) \times \cdots \times \mathfrak{A}^1(M)$ (k-fois), où $i(X)\omega^a$ est le produit intérieur de X par la deux-forme ω^a.

Pour tout système hamiltonien X et pour tout x de M, il existe un voisinage ouvert U de M et une application $H \in C^\infty(U, \mathbb{R}^k)$ vérifiant dans U l'égalité $j(X) = -\mathrm{d}H$. Lorsque $U = M$, l'application H sera appelée application hamiltonienne de X et le système hamiltonien X sera dit strict. Inversement, si H est une application hamiltonienne c'est à dire que H est un élément de $C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$ vérifiant $\mathrm{d}H \in j(\mathscr{L}(M, \mathscr{F}))$, il existe un unique champ de vecteurs sur M, noté X_H et appelé système hamiltonien associé à H, tel que $j(X_H) = -\mathrm{d}H$.

On désigne par $\mathfrak{H}(M)$ (resp. $\mathfrak{S}(M)$ (resp. $\mathscr{H}(M)$) l'ensemble des applications hamiltoniennes (resp. des systèmes hamiltoniens (resp. des systèmes hamiltoniens stricts)) de la structure k-symplectique $(\omega^1, ..., \omega^k; E)$.

Proposition 2.1. *Soient H, K des applications hamiltoniennes et X_H, X_K les systèmes hamiltoniens associés. Le crochet de Lie $[X_H, X_K]$ est un système hamiltonien; et plus précisément l'application notée $\{H, K\}$ de M dans $\mathbb{R}^k$ définie par*

$$\{H, K\} = -(\omega^1(X_H, X_K), ..., \omega^k(X_H, X_K))$$

satisfait à

$$[X_H, X_K] = X_{\{H,K\}} .$$

La correspondance $(H, K) \mapsto \{H, K\}$ nous permet de munir $\mathfrak{H}(M)$ d'une structure d'algèbre de Lie de dimension infinie.

2.2. Avec l'hypothèse M connexe, on a la suite exacte d'algèbres de Lie

$$0 \to \mathbb{R}^k \xrightarrow{\text{inj}} \mathfrak{H}(M) \xrightarrow{\nu} \mathscr{H}(M) \to 0 ,$$

où $\nu(H) = X_H$.

2.3. Dans les notations ci-dessus on a les propriétés suivantes:
(i) $\mathscr{H}(M)$ est un idéal de $\mathfrak{S}(M)$,
(ii) $[\mathfrak{S}(M), \mathfrak{S}(M)] \subseteq \mathscr{H}(M)$.

En effet pour tout X et Y dans $\mathfrak{S}(M)$ on a:

$$i([X, Y])\omega^a = [\pounds_X, i(Y)]\omega^a = \pounds_X(i(Y)\omega^a) = -\mathrm{d}(\omega^a(X, Y)) ,$$

donc $[X, Y] \in \mathscr{H}(M)$.

Soient G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et M une variété différentiable connexe de dimension $n(k+1)$ munie d'une structure k-symplectique $(\omega^1, ..., \omega^k; E)$. On suppose que G opère différentiablement à gauche sur M par $\varphi: G \times M \to M$. Pour tout $g \in G$, on désigne par φ_g le difféomorphisme $x \mapsto \varphi(g, x)$ de M.

Définition 2.4. On dit que M est un G-espace k-symplectique si pour tout $g \in G$ et $x \in M$ on a:
(i) $\forall a$ $(a = 1, ..., k)$, $\varphi_g^* \omega^a = \omega^a$,
(ii) $(\varphi_g)_* E_x = E_{\varphi(g,x)}$.
Si de plus l'action de G sur M est transitive, on dira que M est un G-espace k-symplectique homogène.

Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on désigne par X_M le champ fondamental associé à X par l'action de G sur M. Le champ de vecteurs X_M est défini par:

$$\forall x \in M , \quad X_M(x) = \mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\, \varphi(\exp(tX), x) .$$

Pour tout $X \in \mathfrak{g}$ le champ de vecteurs X_M est complet et la correspondance $\sigma: X \mapsto X_M$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{X}(M)$ est un anti-homomorphisme d'algèbres de Lie; et si de plus l'action de G sur M est effective alors σ est injective [13].

Soit $x \in M$. On désigne par $G \cdot x$ la G-orbite de x et par G_x le sous-groupe d'isotropie de x relativement à cette action. G_x est un sous-groupe fermé de G et l'espace homogène G/G_x admet une structure naturelle de variété différentiable; on conviendra de munir la G-orbite $G \cdot x$ de la structure de variété différentiable pour laquelle la bijection $g \cdot G_X \mapsto \varphi(g, x)$ de G/G_x sur $G \cdot x$ est un isomorphisme de variétés différentiables.

Pour M non nécessairement connexe et $x \in M$, l'espace tangent $T_y(G \cdot x)$ de la G-orbite $G \cdot x$ en un de ses points y est formé par les éléments $X_M(y)$ tels que $X \in \mathfrak{g}$ et l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_x$ du groupe G_x est formée par les vecteurs X de $\mathfrak{g}$ pour lesquels $X_M(x) = 0$ [6].

Il existe une action naturelle du groupe G sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}^k)$ dite coadjointe induisant le cas usuel pour $k = 1$; une telle action est définie par:

$$\forall g \in G\,, \quad \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}^k)\,, \quad \forall X \in \mathfrak{g}\,, \quad \langle \mathrm{Ad}_g^*(f), X\rangle = \langle f, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)\rangle\ ;$$

les orbites de cette action seront appelées G-orbites coadjointes.

La relation (i) de la définition 2.4 donne:

2.5. Soit M un G-espace k-symplectique. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, le champ de vecteurs X_M est un système hamiltonien.

Définition 2.6. Un G-espace k-symplectique M sera dit strict si pour tout X appartenant à $\mathfrak{g}$, le champ de vecteurs X_M est un système hamiltonien strict.

Proposition 2.7. *Pour qu'un G-espace k-symplectique M soit strict, il est nécessaire et suffisant qu'il existe une base* (X^s), $1 \leqslant s \leqslant p$ $(p = \dim \mathfrak{g})$, *telle que les champs de vecteurs fondamentaux qui leurs sont associés* $X_M^1, \ldots, X_M^p$ *soient des systèmes hamiltoniens stricts.*

Proposition 2.8. *Un G-espace k-symplectique M est strict dans chacun des cas suivants:*

(i) Le groupe de cohomologie de De Rham $H^1(M, \mathbb{R})$ *est trivial.*

(ii) $\mathfrak{g}$ *vérifie* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Démonstration. Soient M un G-escape k-symplectique et X un élément de $\mathfrak{g}$. Si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, il existe un ensemble fini I d'indices et des champs de vecteurs $X^s, Y^s \in \mathfrak{g}$ $(s \in I)$ tels que $X = \sum_{s \in I} [X^s, Y^s]$, et par conséquent on a $X_M = -\sum_{s \in I} [X_M^s, Y_M^s]$.

La propriété (ii) de 2.3 et la proposition 2.5 montrent que $[X_M^s, Y_M^s] \in \mathscr{H}(M)$ pour tout $s \in I$, et par conséquent X_M est un système hamiltonien strict, ce qui montre l'assertion (ii).

L'assertion (i) est une conséquence immédiate de la définition. □

Définition 2.9. Soit M un G-espace k-symplectique strict. On appelle relèvement de M un homomorphisme d'algèbres de Lie J de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{H}(M)$ tel que pour tout $X \in \mathfrak{g}$ le champ de vecteurs X_M est le système hamiltonien associé à l'application hamiltonienne $-J(X)$.

Définition 2.10. Un G-espace k-symplectique strict muni d'un relèvement J sera appelé G-espace hamiltonien.

Définition 2.11. Soit M un G-espace hamiltonien muni d'un relèvement J. On appelle moment de J l'application $\tilde{J}$ de M dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}^k)$ définie par

$$\forall x \in M\,, \quad \forall X \in \mathfrak{g}\,, \quad \tilde{J}(x)(X) = J(X)(x)\ .$$

Exemple 2.12. Considérons l'espace réel $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ muni des coordonnées cartésiennes (x^{as}, x^s), $1 \leqslant a \leqslant k$, $1 \leqslant s \leqslant n$, et de sa structure k-symplectique canonique $(\omega^1, \ldots, \omega^k; E)$ définie par les deux-formes

$$\omega^a = \sum_{s=1}^{n} \mathrm{d}x^{as} \wedge \mathrm{d}x^s \quad (a=1, \ldots, k)$$

et par le sous-fibré E de $T\mathbb{R}^{n(k+1)}$ défini par $\mathrm{d}x^1 = \cdots = \mathrm{d}x^n = 0$.

Soit M l'espace $\mathbb{R}^{nk} \times (\mathbb{R}^n \setminus (0))$ muni de la structure k-symplectique induite par la structure k-symplectique canonique de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$. L'action naturelle du groupe k-symplectique $\mathrm{Sp}(k, n; \mathbb{R})$ [2] sur M est effective.

Rappelons [2] que l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(k, n; \mathbb{R})$ du groupe $\mathrm{Sp}(k, n; \mathbb{R})$ est faite de matrices du type:

$$X = \begin{bmatrix} A & & 0 & S_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & A & S_k \\ 0 & & & -{}^{\mathrm{t}}A \end{bmatrix}, \tag{i}$$

où $A, S_1, \ldots, S_k$ sont des matrices $n \times n$ avec $S_1, \ldots, S_k$ symétriques.

(ii) M est un $\mathrm{Sp}(k, n; \mathbb{R})$-espace k-symplectique homogène strict.

Soit $X \in \mathfrak{sp}(k, n; \mathbb{R})$; le champ fondamental X_M associé à X par l'action de G sur M est donné par $X_M(x) = X \cdot x$; et pour $x = (x^{as}, x^s)$, $1 \leqslant a \leqslant k$, $1 \leqslant s \leqslant n$, appartenant à M on a

$$\begin{aligned} X_M(x) &= \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{a=1}^{k} (u_{sj} x^{aj} + S_{asj} x^j) \frac{\partial}{\partial x^{as}} - u_{js} x^j \frac{\partial}{\partial x^s} \right) \right) \\ &= \sum_{s=1}^{n} \left(- \sum_{a=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x^s} (x^1, \ldots, x^n) x^{aj} + \frac{\partial g^a}{\partial x_s} (x^1, \ldots, x^n) \right) \frac{\partial}{\partial x^{as}} \right. \\ &\quad \left. + f_s(x^1, \ldots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^s} \right), \end{aligned}$$

avec

$$f_s = - \sum_{j=1}^{n} u_{js} x^j, \qquad g^a = - \frac{1}{2} \sum_{s,j=1}^{n} S_{asj} x^s x^j .$$

X est une matrice du type (i) et u_{ij} (resp. S_{aij}), $1 \leqslant i, j \leqslant n$, sont les coefficients de A (resp. S_a).

Il en résulte que l'application H de M dans $\mathbb{R}^k$ de composantes

$$H^a = \sum_{s=1}^{n} f_s(x^1, \ldots, x^n) x^{as} + g^a(x^1, \ldots, x^n)$$

est une application hamiltonienne de X_M [2].

La correspondance $X \mapsto -H$ permet de définir grâce à la construction précédente, une application J de $\mathfrak{sp}(k, n; \mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathfrak{H}(M)$ satisfaisant aux propriétés suivantes:

(iii) $J(X)(0)=0$, $\forall X \in \mathfrak{sp}(k, n; \mathbb{R})$,

(iv) $\forall X \in \mathfrak{sp}(k, n; \mathbb{R})$, $X_{J(X)} = -X_M$,

(v) J est un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{sp}(k, n; \mathbb{R})$ dans $\mathfrak{H}(M)$; i.e. que J confère à M une structure de $\mathrm{Sp}(k, n; \mathbb{R})$-espace hamiltonien.

La composante $\tilde{J}^a$ $(a=1, ..., k)$ de l'application moment du relèvement J est l'application de M à valeurs dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{sp}(k, n; \mathbb{R}), \mathbb{R}^k)$ définie par:

$$\forall x \in M \quad \forall X \in \mathfrak{sp}(k, n; \mathbb{R}) \quad \tilde{J}^a(x)(X) = -\left(\sum_{s,j=1}^{n} u_{js} x^j x^{as} + \frac{1}{2} \sum_{s,j=1}^{n} S_{asj} x^s x^j \right),$$

avec les notations ci-dessus pour x et X.

En utilisant la définition d'un système hamiltonien on obtient:

Proposition 2.13. *Soit M un G-espace k-symplectique. Pour tout $H \in \mathfrak{H}(M)$ et $g \in G$, $\varphi_g^* H \in \mathfrak{h}(M)$; et plus précisément on a:*

$$X_{\varphi_g^* H} = (\varphi_g^{-1})_* X_H .$$

Corollaire 2.14. *Si M est un G-espace hamiltonien muni d'un relèvement J alors pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $g \in G$ on a:*

$$X_{\varphi_g^* J(X)} = (\varphi_g^{-1})_* X_{J(X)} .$$

Il résulte, de la proposition 2.13, le

Corollaire 2.15. *Soit M un G-espace k-symplectique. Pour tout $g \in G$ l'application φ_g^* définit un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{H}(M)$ dans lui même.*

Rappelons que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $g \in G$ et $t \in \mathbb{R}$ on a $\exp(t\,\mathrm{Ad}_g X) = g \exp(tX) g^{-1}$ [18]. En dérivant par rapport à t on obtient

$$(\varphi_g)_* X_M = (\mathrm{Ad}_g X)_M ,$$

et, donc, si M est un G-espace hamiltonien admettant J pour relèvement, alors on a la relation suivante:

$$\forall X \in \mathfrak{g},\ \forall g \in G, \quad X_{(\varphi_{g^{-1}})^* J(X)} = (\mathrm{Ad}_g X)_M , \tag{2.3}$$

ce qui est équivalent à dire que pour tout $g \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$ l'application

$$\theta(g)(X) = (\varphi_{g^{-1}})^* J(X) - J(\mathrm{Ad}_g X) \tag{2.4}$$

définie sur M et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ est constante sur M, et donc il existe une application différentiable de G dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}^k)$, notée également θ, telle que pour tout $g \in G$ et $x \in M$ on ait:

$$\theta(g) = \tilde{J}(\varphi_{g^{-1}}(x)) - \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}(\tilde{J}(x)) .$$

Soit c l'application de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}^k)$ définie par:

$$\forall g \in G , \quad c(g) = \theta(g^{-1}) .$$

Pour tout $g_1, g_2 \in G$ et $x \in M$ on a:

$$\begin{aligned} c(g_1 g_2) &= \tilde{J}(\varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x)) - \mathrm{Ad}^*_{g_1}(\mathrm{Ad}^*_{g_2}(\tilde{J}(x)) \\ &= \tilde{J}(\varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x)) - \mathrm{Ad}^*_{g_1}(\tilde{J}(\varphi_{g_2}(x)) \\ &\quad + \mathrm{Ad}^*_{g_1}(\tilde{J}(\varphi_{g_2}(x)) - \mathrm{Ad}^*_{g_1}(\mathrm{Ad}^*_{g_2}(\tilde{J}(x)) \\ &= c(g_1) + \mathrm{Ad}^*_{g_1}(c(g_2)) , \end{aligned}$$

donc les composantes c^a de c (qui sont des applications de G à valeurs dans $\mathfrak{g}^*$) sont des un-cocycles de G pour la représentation coadjointe [11], et par conséquent on a:

$$\forall g \in G , \quad c^{\mathrm{T}}_g = \mathrm{Ad}^*_g \circ c^{\mathrm{T}}_e \circ L^{\mathrm{T}}_{g^{-1}} ,$$

où c^{T}_g est la différentielle de l'application c au point g, e est l'élément neutre de G et L est la translation à gauche du groupe G.

L'application θ satisfait la propriété suivante:

$$\forall g \in G , \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} , \quad \theta(g)([X, Y]) = 0 . \tag{2.5}$$

En effet on a

$$J(\mathrm{Ad}_g [X, Y]) = J([\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y]) = \{J(\mathrm{Ad}_g X), J(\mathrm{Ad}_g Y)\} .$$

$\theta(g)(X)$ et $\theta(g)(Y)$ étant constantes sur M, d'où

$$\begin{aligned} J(\mathrm{Ad}_g [X, Y]) &= \{(\varphi_{g^{-1}})^* J(X), (\varphi_{g^{-1}})^* J(Y)\} = (\varphi_{g^{-1}})^* \{J(X), J(Y)\} \\ &= (\varphi_{g^{-1}})^* J([X, Y]) , \end{aligned}$$

et, donc, $\theta(g)([X, Y]) = 0$.

Proposition 2.16. *Pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $g \in G$, θ est constante sur la courbe $\gamma(t) = g \times \exp(tX)$.*

Démonstration. Pour tout $Y \in \mathfrak{g}$ on a:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(\gamma(t))\bigg|_{t=0}\right)(Y)\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\varphi_{(g\exp(tX))^{-1}})^*J(Y)\right)\bigg|_{t=0}-J(\mathrm{Ad}_g[X,Y])\\
&=\mathrm{d}J(Y)\circ\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_{\exp(-tX)}\circ\varphi_{g^{-1}})\bigg|_{t=0}\right)-J(\mathrm{Ad}_g[X,Y])\\
&=-\mathrm{d}J(Y)(X_M)\circ\varphi_g^{-1}-J(\mathrm{Ad}_g[X,Y])\\
&=(\varphi_g^*)^{-1}\{J(X),J(Y)\}-J(\mathrm{Ad}_g[X,Y])\\
&=(\varphi_g^*)^{-1}J([X,Y])-J(\mathrm{Ad}_g[X,Y])=\theta(g)([X,Y])=0\,.
\end{aligned}
$$

Y étant quelconque, donc $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\theta(\gamma(t))|_{t=0}=0$ et la propriété est démontrée. □

La proposition précédente montre que $\theta_e^{\mathrm{T}}=0$, et, donc, $c_e^{\mathrm{T}}=0$, par conséquent $c_g^{\mathrm{T}}=0$ pour tout $g\in G$. Ceci étant, θ est constante sur les composantes connexes de G; G étant connexe, donc θ est constante sur G, par suite on a:

$$\forall g\in G\,,\quad \forall X\in\mathfrak{g}\,,\quad \theta(g)(X)=\theta(e)(X)=J(X)-J(X)=0\,,$$

donc $\varphi_g^*\circ J=J\circ\mathrm{Ad}_g$ pour tout $g\in G$ et $X\in\mathfrak{g}$; ce qui est équivalent à

$$\forall g\in G\,,\quad \tilde{J}\circ\varphi_g=\mathrm{Ad}_g^*\circ\tilde{J}\,, \tag{2.6}$$

$\tilde{J}$ étant l'application moment associée au relèvement J.

La relation (2.6) signifie que l'application moment est équivariante.

Proposition 2.17. [15]. *Soient M un G-espace hamiltonien, $H\in\mathfrak{H}(M)$ G-invariant, i.e., $H(\varphi(g,x))=H(x)$ pour tout $x\in M$ et $g\in G$. Alors $\tilde{J}$ est constante sur les trajectoires du champ de vecteurs X_H.*

Soient M un G-espace k-symplectique strict, $X^1, \dots, X^p$ une base de $\mathfrak{g}$ et $H^1, \dots, H^p$ des applications hamiltoniennes de $X_M^1, \dots, X_M^p$ respectivement.

L'application $\mathbb{R}$-linéaire J_0 de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{H}(M)$ telle que $J_0(X^i)=-H^i$ pour tout i $(i=1,\dots,p)$ satisfait la relation $X_{J_0(X)}=-X_M$ pour tout $X\in\mathfrak{g}$; si J_0 est un morphisme d'algèbres de Lie alors M est un G-espace hamiltonien.

Supposons que J_0 n'est pas un morphisme d'algèbres de Lie et considérons l'application μ de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{H}(M)$ définie par:

$$\forall (X,Y)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\,,\quad \mu(X,Y)=\{J_0(X),J_0(Y)\}-J_0([X,Y])\,. \tag{2.7}$$

Pour tout $(X,Y)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ on a $X_{\mu(X,Y)}=0$, donc, $\mu(X,Y)$ est constante sur M et par conséquent μ définit une application $\mathbb{R}$-bilinéaire anti-symétrique β de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Proposition 2.18. *On a*

(i) $\delta\beta=0$.

(ii) S'il existe $\alpha\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}^k)$ *tel que* $\beta=\delta\alpha$, *et en particulier si le groupe de cohomologie de De Rham* $H^2(M,\mathbb{R})$ *est triviale, alors M admet un relèvement (qui n'est pas unique en général).*

(iii) Si $H^2(M,\mathbb{R})=\{0\}$ *et* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$, *le G-espace M possède un relèvement unique.*

(iv) Si β *n'est pas un cobord, il existe un groupe de Lie connexe et simplement connexe* $\tilde{G}_\beta$ *d'algèbre de Lie* $\tilde{\mathfrak{g}}_\beta=\mathfrak{g}\times\mathbb{R}^k$ *pour la loi d'algèbre de Lie*

$$B((X,T),(Y,S))=([X,Y],\beta(X,Y))$$

tel que M soit un $\tilde{G}_\beta$*-espace hamiltonien.*

Démonstration. Pour tout $Z^1, Z^2, Z^3\in\mathfrak{g}$ on a:

$$\begin{aligned}\delta\beta(Z^1,Z^2,Z^3)&=-\beta([Z^1,Z^2],Z^3)+\beta([Z^1,Z^3],Z^2)-\beta([Z^2,Z^3],Z^1)\\&=-\{J_0([Z^1,Z^2]),J_0(Z^3)\}+\{J_0([Z^1,Z^3]),J_0(Z^2)\}\\&\quad-\{J_0([Z^2,Z^3]),J_0(Z^1)\},\end{aligned}$$

et pour tout a ($a=1,\ldots,k$) on a:

$$\begin{aligned}&\{J_0([Z^1,Z^2]),J_0(Z^3)\}^a\\&=-\omega^a([Z^1,Z^2]_M,Z^3_M)=(i(Z^3_M)\omega^a)([Z^1,Z^2]_M)\\&=-[Z^1,Z^2]_M(J_0^a(Z^3))=[Z^1_M,Z^2_M](J_0^a(Z^3)\\&=[X_{J_0(Z^1)},X_{J_0(Z^2)}](J_0^a(Z^3))\\&=X_{\{J_0(Z^1),J_0(Z^2)\}}(J_0^a(Z^3)=-(i(Z^3_M)\omega^a)(X_{\{J_0(Z^1),J_0(Z^2)\}})\\&=-\omega^a(X_{\{J_0(Z^1),J_0(Z^2)\}},X_{J_0(Z^3)})=-\{\{J_0(Z^1),J_0(Z^2)\},J_0(Z^3)\}^a,\end{aligned}$$

donc

$$\{J_0([Z^1,Z^2]),J_0(Z^3)\}=-\{\{J_0(Z^1),J_0(Z^2)\},J_0(Z^3)\};$$

par conséquent on a:

$$\begin{aligned}\delta\beta(Z^1,Z^2,Z^3)&=\{\{J_0(Z^1),J_0(Z^2)\},J_0(Z^3)\}-\{\{J_0(Z^1),J_0(Z^3)\},J_0(Z^2)\}\\&\quad+\{\{J_0(Z^2),J_0(Z^3)\},J_0(Z^1)\}=0\end{aligned}$$

et l'assertion (i) est démontrée.

Supposons qu'il existe $\alpha\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g},\mathbb{R}^k)$ tel que $\beta=\delta\alpha$, et soit J l'application de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{H}(M)$ définie par:

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall x \in M, \quad J(X)(x) = J_0(X)(x) - \alpha(X).$$

Pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $x \in M$ on a:

$$\begin{aligned}
&(\{J(X), J(Y)\} - J([X, Y]))(x) \\
&= \{J_0(X), J_0(Y)\}(x) - J_0([X, Y])(x) + \alpha([X, Y]) \\
&= \mu(X, Y)(x) + \alpha([X, Y]) = \beta(X, Y) + \alpha([X, Y]) \\
&= \delta\alpha(X, Y) + \alpha([X, Y]) = 0.
\end{aligned}$$

L'application J définit bien un relèvement de M, ce qui montre l'assertion (ii).

Supposons que $H^2(M, \mathbb{R}) = \{0\}$ et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. La propriété (ii) montre que le G-espace M admet au moins un relèvement. Soient J_1 et J_2 deux relèvements de M. La relation $X_{J_1(X)} = X_{J_2(X)}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ montre que l'application $J_1(X) - J_2(X)$ de M dans $\mathbb{R}^k$ est constante pour tout $X \in \mathfrak{g}$; donc $J_1 - J_2$ définit une application de $\mathfrak{g}$ dans $\mathbb{R}^k$ qui est un homomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathbb{R}^k$; d'où

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad (J_1 - J_2)([X, Y]) = 0.$$

Ce qui montre que la restriction de l'application $J_1 - J_2$ à $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nulle, et par conséquent $J_1 - J_2 = 0$.

Supposons que β n'est pas un cobord. Soient $\tilde{\mathfrak{g}}_\beta$ l'espace produit $\tilde{\mathfrak{g}}_\beta = \mathfrak{g} \times \mathbb{R}^k$ et B l'application de $\tilde{\mathfrak{g}}_\beta \times \tilde{\mathfrak{g}}_\beta$ à valeurs dans $\tilde{\mathfrak{g}}_\beta$ définie par:

$$\forall u = (X, T), v = (Y, S) \in \tilde{\mathfrak{g}}_\beta, \quad B(u, v) = ([X, Y], \beta(X, Y)),$$

B étant une application $\mathbb{R}$-bilinéaire anti-symétrique; la relation $\delta\beta = 0$ montre que l'identité de Jacobi est satisfaite, donc $(\tilde{\mathfrak{g}}_\beta, B)$ est une algèbre de Lie réelle.

Soit J l'application de $\tilde{\mathfrak{g}}_\beta$ dans $\mathfrak{H}(M)$ définie par:

$$\forall u = (X, T) \in \tilde{\mathfrak{g}}_\beta, \quad J(u) = J_0(X) + T.$$

Pour tout $u = (X, T)$ et $v = (Y, S) \in \tilde{\mathfrak{g}}_\beta$, on a:

$$\{J(u), J(v)\} - J(B(u, v)) = \{J_0(X), J_0(Y)\} - J_0([X, Y]) - \beta(X, Y) = 0,$$

donc J est un morphisme d'algèbres de Lie de $\tilde{\mathfrak{g}}_\beta$ dans $\mathfrak{H}(M)$ vérifiant:

$$\forall u \in \tilde{\mathfrak{g}}_\beta, \quad X_{J(u)} = -X_M.$$

Soient $\tilde{G}_\beta$ un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}_\beta$ et $\tilde{H}_\beta$ le sous-groupe de Lie connexe de $\tilde{G}_\beta$ ayant pour algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{h}}_\beta = 0_{\mathfrak{g}} \times \mathbb{R}^k$. La sous-algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{h}}_\beta$ est un idéal de $\tilde{\mathfrak{g}}_\beta$, donc $\tilde{H}_\beta$ est un sous-groupe normal de $\tilde{G}_\beta$. La variété quotient $\tilde{G}_\beta / \tilde{H}_\beta$ est un groupe de Lie connexe et simplement connexe [14] dont l'algèbre de Lie est isomorphe à $\mathfrak{g}$; donc [18] il existe un revêtement différentiable $p: \tilde{G}_\beta / \tilde{H}_\beta \to G$.

Soit $\tilde{p}$ l'application de $\tilde{G}_\beta$ dans G définie par:

$$\forall \tilde{g} \in \tilde{G}_\beta, \quad \tilde{p}(\tilde{g}) = p(\tilde{g}\tilde{H}_\beta).$$

Le groupe de Lie $\tilde{G}_\beta$ opère différentiablement sur M par:

$$\forall \tilde{g} \in \tilde{G}_\beta, \quad \forall x \in M, \quad \tilde{\varphi}(\tilde{g}, x) = \varphi(\tilde{p}(\tilde{g}), x) .$$

Par rapport à l'action $\tilde{\varphi}$ on a:

$$\forall u = (X, T) \in \tilde{\mathfrak{g}}_\beta, \quad X_{J(u)} = -u_M = -X_M ,$$

i.e. que par rapport à cette action, J est un relèvement du $\tilde{G}_\beta$-espace M, et, donc, M est un $\tilde{G}_\beta$-espace hamiltonien. □

Exemple d'application 2.19. Soit M l'espace réel $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ muni de sa structure k-symplectique canonique définie en 2.12. Le groupe additif $G = \mathbb{R}^{n(k+1)}$ opère différentiablement et transitivement sur M par l'application φ définie par:

$$\forall g \in G, \quad \forall x \in M, \quad \varphi(g, x) = x + g .$$

Cette action est effective (elle est même libre).

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe de Lie G est l'espace $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ muni de sa structure triviale d'algèbre de Lie, les actions adjointe et coadjointe de G sur M et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}^k)$ respectivement sont également triviales.

Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, le champ fondamental X_M associé à X par l'action définie ci-dessus est tel que $X_M(x) = X$ pour tout $x \in M$.

(1) La variété M est G-espace k-symplectique.

La famille $(\partial/\partial x^{a_s}, \partial/\partial x^s, 1 \leqslant a \leqslant k, 1 \leqslant s \leqslant n$, définie par les dérivations associées au système de coordonnées cartésiennes (x^{a_s}, x^s), $1 \leqslant a \leqslant k$, $1 \leqslant s \leqslant n$, est une base de $\mathfrak{g}$.

Les applications H_{a_j} et H_j $(1 \leqslant a \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant n)$ de M dans $\mathbb{R}^k$ définies par:

$$H_{a_j}(x) = -(\delta_a^1 \cdot x^j, \ldots, \delta_a^k \cdot x^j) , \qquad H_j(x) = (x^{1_j}, \ldots, x^{k_j})$$

satisfont à

$$X_{H_{a_j}} = (\partial/\partial x^{a_j})_M , \qquad X_{H_j} = (\partial/\partial x^j)_M .$$

Soit J_0 l'application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{H}(M)$ définie par:

$$J_0\Big(\sum_{a,j} X^{a_j}\, \partial/\partial x^{a_j} + \sum_j X^j\, \partial/\partial x^j\Big) = -\Big(\sum_{a,j} X^{a_j} H_{a_j} + \sum_j X^j H_{a_j}\Big) .$$

L'application J_0 vérifie $X_{J_0(X)} = -X_M$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, donc M est un G-espace k-symplectique strict.

Le fait que $\mathfrak{g}$ soit une algèbre de Lie abélienne et que $\mathfrak{H}(M)$ ne le soit pas montre que J_0 n'est pas un homomorphisme d'algèbres de Lie et que l'application β (proposition 2.18) n'est pas un cobord.

L'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}_\beta$ étant le produit $\tilde{\mathfrak{g}}_\beta = \mathfrak{g} \times \mathbb{R}^k$ muni de la loi d'algèbre de Lie définie dans ce cas par:

(2) $\forall u=(X,T), v=(Y,S)$, $B(u,v)=(0,\beta(X,Y))$, avec $\beta(X,Y)=\{J_0(X), J_0(Y)\}-J_0([X,Y])=\{J_0(X), J_0(Y)\}$.

Soit $\tilde{H}(n,k)$ l'espace $\tilde{H}(n,k)=\mathbb{R}^{n(k+1)}\times\mathbb{R}^k$ dont la loi de groupe est donnée par:

(3)

$$\forall u=(X,T), v=(Y,S)\in\tilde{H}(n,k)\ , \quad u\cdot v=(X+Y, T+S+\tfrac{1}{2}\beta(X,Y))\ .$$

(4) **Proposition.** *$\tilde{H}(n,k)$ est un groupe de Lie connexe et simplement connexe ayant pour algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}_\beta$ et est isomorphe au groupe de Heisenberg $H(n,k)$ d'ordre k au sens de la ref.* [5].

Rappelons que le groupe de Heisenberg d'ordre k au sens de Goze-Haraguchi [5] est le sous-groupe $H(n,k)$ de $\mathrm{Gl}(k+n+1,\mathbb{R})$ formé des matrices du type:

$$(P,Q,T)=\begin{bmatrix} I_k & P & T \\ 0 & I_n & Q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où I_k (resp. I_n) est la matrice unité d'ordre k (resp. n), P une matrice réelle $k\times n$ et T (resp. Q) est une matrice colonne d'ordre k (resp. n).

Le groupe de Heisenberg d'ordre k est un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe de dimension $(k+1)n+k$ dont le groupe dérivé coïncide avec le centre [5].

L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}(n,k)$ du groupe de Heisenberg $H(n,k)$ d'ordre k est faite de matrices du type:

$$(X,Y,T)=\begin{bmatrix} 0 & X & T \\ 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où X est une matrice réelle $k\times n$, T et Y sont des matrices colonnes d'ordre k et n respectivement.

L'application $(X,Y,T)\mapsto((X,Y),T)$ de $\mathfrak{h}(n,k)$ dans $\tilde{\mathfrak{g}}_\beta$ est en fait un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Il résulte de la démonstration de (iv) de la proposition 2.18 que

(5) L'application J de $\mathfrak{h}(n,k)$ dans $\mathfrak{H}(M)$ définie par:

$$\forall(X,Y,T)\in\mathfrak{h}(n,k)\ , \quad J(X,Y,T)=J_0(X,Y)+T$$

est un relèvement M, et donc M est un $H(n,k)$-espace hamiltonien.

Le moment correspondant dans ce cas est l'application de M dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h}(n,k),\mathbb{R}^k)$ définie par:

$$\forall x\in M\ , \quad \forall(X,Y,T)\in\mathfrak{h}(n,k)\ , \quad \tilde{J}(x)(X,Y,T)=J_0(X,Y)(x)+T\ .$$

3. Opération coadjointe associée à une action hamiltonienne

Soient M un G-espace hamiltonien homogène muni d'un relèvement J de moment $\tilde{J}$ et $\mathfrak{h}^{(E)}$ le sous-ensemble de $\mathfrak{g}$ formé des éléments X tels que $X_M \in \Gamma(E)$; $\mathfrak{h}^{(E)}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

Proposition 3.1. *Soit $x \in M$. L'espace tangent au feuilletage $\mathfrak{F}$ au point x est donné par:*

$$E_x = \{X_M(x) / X \in \mathfrak{h}^{(E)}\} .$$

De la définition de $\mathfrak{h}^{(E)}$, on a $X_M(x) \in E_x$ pour tout $X \in \mathfrak{h}^{(E)}$.

Réciproquement soit $v_x \in E_x$. Munissons la variété M de la structure de variété différentiable définie par le feuilletage $\mathfrak{F}$; on peut alors la voir comme une variété de dimension nk dont les feuilles sont les composantes connexes. L'espace tangent à M en x pour cette structure de variété n'est rien d'autre que E_x, l'opération de G sur M étant transitive, donc il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que v_x soit égal à $X_M(x)$; or pour la structure initiale de variété différentiable de M, X_M est une section de E et par conséquent $X \in \mathfrak{h}^{(E)}$; autrement dit, $v_x = X_M(x)$ avec $X \in \mathfrak{h}^{(E)}$.

Proposition 3.2. *Si l'action de G sur M est effective alors $\mathfrak{h}^{(E)}$ est une algèbre de Lie abélienne.*

Démonstration. De la proposition 2.5, on a

$$\pounds_{X_M}\omega^a = \pounds_{Y_M}\omega^a = 0 ,$$

pour tout X, $Y \in \mathfrak{h}^{(E)}$ et a $(a = 1, ..., k)$, et par conséquent on a:

$$\begin{aligned} i([X, Y]_M)\omega^a &= -i([X_M, Y_M])\omega^a \\ &= -[\pounds_{X_M}, i(Y_M)]\omega^a = -\pounds_{X_M}(i(Y_M)\omega^a) \\ &= \mathrm{d}(\omega^a(X_M, Y_M)) = 0 \end{aligned}$$

pour tout a $(a = 1, ..., k)$, puisque X_M et Y_M sont tangents aux feuilles de $\mathfrak{F}$. La définition d'une structure k-symplectique donne $[X, Y]_M = 0$; l'action de G sur M étant effective, on a $[X, Y] = 0$ et l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}^{(E)}$ est donc abélienne.

Exemple 3.3. Dans le cas de l'exemple 2.12, $\mathfrak{h}^{(E)}$ est la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{tp}(k, n; \mathbb{R})$ de l'algèbre de Lie k-symplectique $\mathfrak{sp}(k, n; \mathbb{R})$ faite des matrices de la forme (i) de 2.12 avec $A = 0$; $\mathfrak{tp}(k, n; \mathbb{R})$ est un idéal abélien de $\mathfrak{sp}(k, n; \mathbb{R})$.

Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on désigne par X^* le champ fondamental associé à X par l'action coadjointe de G sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}^k)$; il en résulte de l'égalité $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}$

$\mathrm{Ad}_{\exp(tX)} Y = [X, Y]$ que:

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}^k), \quad \langle Y^*(f), X \rangle = -\langle f, [X, Y] \rangle . \tag{3.1}$$

Soient O une G-orbite coadjointe, $f = (f^a)$, $1 \leqslant a \leqslant k$, appartenant à O et X_1, X_2, Y dans $\mathfrak{g}$ tels que $X_1^*(f) = X_2^*(f)$. Pour tout a $(a = 1, \ldots, k)$ on a:

$$\langle f^a, [X_1, Y] \rangle = \langle f^a, [X_1 - X_2, Y] \rangle + \langle f^a, [X_2, Y] \rangle .$$

Or $X_1 - X_2$ est dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_f$ du sous-groupe d'isotropie G_f de f relativement à l'opération coadjointe, donc

$$\langle f^a, [X_1 - X_2, Y] \rangle = \langle [X_1 - X_2)^*(f^a), Y \rangle = 0 ,$$

et par suite $\langle f^a, [X_1, Y] \rangle = \langle f^a, [X_2, Y] \rangle$.

Ceci montre que sur toute G-orbite coadjointe O on a k formes différentielles $\Omega^1, \ldots, \Omega^k$ de degré 2 définies par:

$$\forall f = (f^a) \in O, 1 \leqslant a \leqslant k, \quad \forall X^*(f), Y^*(f) \in T_f O, \quad \forall a \ (a = 1, \ldots, k) ,$$

$$\Omega_f^a(X^*(f), Y^*(f)) = -\langle f^a, [X, Y] \rangle . \tag{3.2}$$

Proposition 3.4. *Les deux-formes différentielles Ω^a $(a = 1, \ldots, k)$ définies en (3.2) sont fermées.*

Démonstration. Soient $f = (f^a) \in O$, $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ et $a = 1, \ldots, k$. Les égalités

$$\begin{aligned} &\Omega_f^a([X^*, Y^*], Z^*) - \Omega_f^a([X^*, Z^*], Y^*) + \Omega_f^a([Y^*, Z^*], X^*) \\ &\quad = \langle f^a, [[X, Y], Z] \rangle - \langle f^a, [[X, Z], Y] \rangle + \langle f^a, [[Y, Z], X] \rangle = 0 \end{aligned}$$

entraînent que l'on a:

$$\mathrm{d}\Omega_f^a(X^*, Y^*, Z^*) = X_f^*(\Omega^a(Y^*, Z^*)) - Y_f^*(\Omega^a(X^*, Z^*)) + Z_f^*(\Omega^a(X^*, Y^*))$$

or

$$\begin{aligned} X_f^*(\Omega^a(Y^*, Z^*)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\psi(\mathrm{Ad}^*_{\exp(tX)}(f))\right)_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Omega^a_{\mathrm{Ad}^*_{\exp(tX)}(f)}(Y^*, Z^*)\right)_{t=0} \\ &= -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \langle f^a \circ \mathrm{Ad}_{\exp(-tX)}, [Y, Z] \rangle = \langle f^a, [X, [Y, Z]] \rangle \end{aligned}$$

avec $\Psi = \Omega^a(Y^*, Z^*)$; et, donc,

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\Omega_f^a(X^*, Y^*, Z^*) \\ &\quad = \langle f^a, [X, [Y, Z]] \rangle - \langle f^a, [Y, [X, Z]] \rangle + \langle f^a, [Z, [X, Y]] \rangle = 0 \end{aligned}$$

et les formes Ω^a $(a = 1, \ldots, k)$ sont fermées.

Proposition 3.5. *Si l'action de G sur M est effective alors*

$$\forall X, Y \in \mathfrak{h}^{(E)}, \quad \forall f \in O, \quad \forall a \; (a=1, \ldots, k), \quad \Omega_f^a(X^*(f), Y^*(f)) = 0 .$$

Soient M un G-espace hamiltonien homogène muni d'un relèvement J, $\tilde{J}$ le moment associé à J et x_0 un point de M. Pour tout $x \in M$, la transitivité de l'action de G sur M montre qu'il existe $g \in G$ tel que $x = \varphi(g, x_0)$ et l'équivariance de $\tilde{J}$ (2.6) donne

$$\tilde{J}(x) = \tilde{J}(\varphi(g, x_0)) = \mathrm{Ad}_g^*(\tilde{J}(x_0)) ,$$

ce qui montre que:

$$\tilde{J}(M) = G \cdot \tilde{J}(x_0) ,$$

et donc $\tilde{J}(M)$ est une G-orbite coadjointe.

Soient $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}^k)$, $O = G \cdot f$ une G-orbite coadjointe de f et J_f l'application de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans $C^\infty(O, \mathbb{R}^k)$ définie par:

$$\forall X \in \mathfrak{g} , \quad \forall p \in O , \quad J_f(X)(p) = \langle p, X \rangle . \tag{3.3}$$

Pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $x \in M$, on a:

$$\tilde{J}^*(J_f(X))(x) = J_f(X)(\tilde{J}(x)) = \langle \tilde{J}(x), X \rangle = J(X)(x) ,$$

d'où

$$\tilde{J}^* \circ J_f = J . \tag{3.4}$$

Il en résulte que:

3.6. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, la relation $J_f(X)$ constante sur O entraîne que $J(X)$ est constante sur M.

L'application moment étant équivariante, donc pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $x \in M$ on a:

$$\begin{aligned}
&(\tilde{J}_* X_M)(\tilde{J}(x)) \\
&= \tilde{J}_x^{\mathrm{T}} X_M(x) = \tilde{J}_x^{\mathrm{T}} \left(\left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right|_{t=0} \varphi(\exp(tX), x) \right) \\
&= \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right|_{t=0} \tilde{J}(\varphi \exp(tX), x)) = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right|_{t=0} \mathrm{Ad}^*_{\exp(tX)}(\tilde{J}(x)) = X^*(\tilde{J}(x)) ,
\end{aligned}$$

et, donc

$$\tilde{J}_* X_M = X^* . \tag{3.5}$$

Les notations sont celles de (3.2). Pour tout X, $Y \in \mathfrak{g}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}^k)$, $p \in O = G \cdot f$ et a $(a = 1, \ldots, k)$ on a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(J_f^a(X))_p(Y^*) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} J_f^a(X)(\mathrm{Ad}^*_{\exp(tY)}(p)) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \langle \mathrm{Ad}^*_{\exp(tY)}(p^a), X\rangle = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \langle p^a, \mathrm{Ad}_{\exp(-tY)}X\rangle \\
&= \langle p^a, [X, Y]\rangle \\
&= -\Omega_p^a(X^*(p), Y^*(p)) = -(i(X^*)\Omega^a)_p Y^* ,
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\forall X\in\mathfrak{g}\,, \quad \forall a\ (a=1, ..., k)\,, \quad i(X^*)\Omega^a = -\mathrm{d}(J_f^a(X))\,. \tag{3.6}$$

Pour tout $X\in\mathfrak{g}$, $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}^k)$ et $O=G\cdot f$, la propriété 3.6 et les relations (3.5) et (3.6) montrent que l'égalité $\tilde{J}_* X_M=0$ entraîne que $J_f(X)$ est constante sur O, et donc, $J(X)$ est constante sur M, par conséquent $i(X_M)\omega^a=0$ pour tout a ($a=1$, ..., k). La définition d'une structure k-symplectique donne $X_M=O$ et l'application $\tilde{J}$ est une immersion; en particulier on a $\dim(M)\leqslant\dim(O)$.

L'équivariance de l'application $\tilde{J}$ montre qu'alors $G_{x_0}\subseteq G_{\tilde{J}(x_0)}$, où G_{x_0} et $G_{\tilde{J}(x_0)}$ sont les sous-groupes d'isotropie de x_0 et $\tilde{J}(x_0)$ respectivement; et donc $\dim(M)\geqslant\dim(O)$.

Il en résulte que les composantes connexes de l'unité $G^e_{x_0}$ et $G^e_{\tilde{J}(x_0)}$ coïncident et par conséquent le groupe quotient $G_{\tilde{J}(x_0)}/G_{x_0}$ est discret; ceci montre que la fibration

$$\tilde{J}: M=G/G_{x_0}\to O=G/G_{\tilde{J}(x_0)}\,,$$

dont la fibre type $G_{\tilde{J}(x_0)}/G_{x_0}$ est discrète, est un revêtement.

On a donc montré le résultat suivant:

Proposition 3.7. [15]. *Soient M un G-espace hamiltonien homogène muni d'un relèvement J de moment $\tilde{J}$. Alors $\tilde{J}(M)$ est une G-orbite coadjointe et l'application $\tilde{J}$ définit un revêtement de M sur une G-orbite coadjointe O.*

On suppose que l'action de G sur M est transitive et effective.

Soit $E^{(O)}$ le sous-fibré de TO défini par:

$$\forall p\in O\,, \quad E_p^{(O)}=\{X^*(p)/X\in\mathfrak{h}^{(E)}\}\,.$$

La relation (3.5) et la proposition 3.7 montrent que la variété O est de dimension $n(k+1)$ et que le sous-fibré $E^{(O)}$ de TO est de codimension n et est intégrable.

Proposition 3.8. *Soient M un G-espace hamiltonien homogène, $x_0\in M$ et $f=\tilde{J}(x_0)$. Alors $(\Omega^1, ..., \Omega^k; E^{(O)})$ est une structure k-symplectique sur $O=G\cdot f$.*

Démonstration. Si pour un point $p=(p^a)$, $1\leqslant a\leqslant k$, de O et $X\in\mathfrak{g}$ on a $i(X^*)\omega^a=0$ pour tout a, alors

$$\forall Y\in\mathfrak{g}\,,\quad \langle p^a, [Y,X]\rangle = \langle X^*(p^a), Y\rangle = 0\,.$$

Y et a étant quelconques, donc $X^*(p)=0$; ce qui montre que la condition (2.1) de la définition d'une structure k-symplectique est satisfaite. Quant à la condition (2.2), elle a été démontrée dans la proposition 3.5.

Proposition 3.9. *Les hypothèses et notations sont celles de la proposition* 3.8. *On a:*

(1) la G-orbite coadjointe $O=G\cdot f$ de f est un G-espace hamiltonien homogène et J_f en est un relèvement;

(2) l'application moment $\tilde{J}$ est un morphisme de variétés k-symplectiques, i.e. elle satisfait aux propriétés suivantes:

(i) $\forall a$ $(a=1,\ldots,k)$, $\tilde{J}^*\Omega^a=\omega^a$,

(ii) $\tilde{J}_*(E)=E^{(O)}$.

Démonstration. Pour tout X, $Y\in\mathfrak{g}$, a $(a=1,\ldots,k)$ et $p\in O$ on a:

$$(\psi_g^*\Omega^a)_p(X^*(p), Y^*(p)) = \Omega^a_{\psi_g(p)}((\psi_g)^{\mathrm{T}}_p X^*(p), (\psi_g)^{\mathrm{T}}_p Y^*(p))$$

avec $\psi_g=\mathrm{Ad}_g^*$, or

$$(\psi_g)^{\mathrm{T}}_p X^*(p) = ((\psi_g)_* X^*)_p = (\mathrm{Ad}_g X)^*(p)\,,$$

donc

$$\begin{aligned}(\psi_g^*\Omega^a)_p(X^*(p), Y^*(p)) &= \Omega^a_{\psi_g(p)}((\mathrm{Ad}_g X)^*(p), (\mathrm{Ad}_g Y)^*(p))\\ &= -\langle p^a, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}([\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y])\rangle\\ &= -\langle p^a, [X,Y]\rangle = \Omega^a_p(X^*(p), Y^*(p))\,.\end{aligned}$$

On a donc montré que la condition (i) de la définition 2.4 est satisfaite; quant à la condition (ii) elle provient de (3.5).

La propriété (3.6) montre que l'orbite O est un G-espace k-symplectique strict.

Pour tout X, $Y\in\mathfrak{g}$, a $(a=1,\ldots,k)$ et $p\in O$ on a:

$$\begin{aligned}\{J_f(X), J_f(Y)\}(p) &= -(\Omega^1_p(X_{J_f(X)}, X_{J_f(Y)}), \ldots, \Omega^k_p(X_{J_f(X)}, X_{J_f(Y)}))\\ &= -(\Omega^1_p(X^*(p), Y^*(p)), \ldots, \Omega^k_p(X^*(p), Y^*(p)))\\ &= \langle p, [X,Y]\rangle = J_f([X,Y])(p)\,,\end{aligned}$$

donc J_f est un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{H}(O)$, et par suite, la G-orbite coadjointe O est un G-espace hamiltonien homogène; ce qui montre (1).

Montrons la propriété (2). La relation (ii) provient de (3.5) et la proposition 3.7.

Soient maintenant X, $Y \in \mathfrak{g}$, $x_0 \in M$ et $a = 1, \ldots, k$. On a:

$$(\tilde{J}^* \Omega^a)_{x_0}(X_M(x_0), Y_M(x_0))$$

$$= \Omega^a_{\tilde{J}(x_0)}((\tilde{J}_* X_M)(x_0), (\tilde{J}_* Y_M)(x_0))$$

$$= \Omega^a_{\tilde{J}(x_0)}(X^*(\tilde{J}(x_0)), Y^*(\tilde{J}(x_0))) = -\langle (\tilde{J}(x_0))^a, [X, Y] \rangle$$

$$= -\langle J^a([X, Y]), x_0 \rangle = -\{J(X), J(Y)\}^a(x_0) = \omega^a_{x_0}(X_M(x_0), Y_M(x_0)) .$$

D'où (i), ce qui achève la démonstration.

Références

[1] A. Awane, Structures k-symplectiques, Thèse Mulhouse (1992).
[2] A. Awane, k-symplectic structures, J. Math. Phys. 33 (1992) 4046–4052.
[3] J. Dieudonné, *Eléments d'Analyse,* Tome 3 (Gauthiers-Villars, 1970).
[4] C. Godbillon, *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique* (Hermann, 1969).
[5] M. Goze and Y. Haraguchi, Sur les r-systèmes de contact, C.R. Acad. Sci. Paris 294 (1982) 95–97.
[6] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces* (Academic Press, New York, 1978).
[7] Y. Haraguchi, Sur une généralisation des structures de contact, Thèse Mulhouse (1981).
[8] A. Kirillov, *Eléments de la Théorie des Représentations* (Mir, Moscou, 1974).
[9] S. Kobayashi and S. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* (Interscience, 1963).
[10] B. Kostant, Quantization and unitary representations I: prequantization, in: *Analysis and Applications* III, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 170 (Springer, Berlin, 1970) pp. 87–208.
[11] P. Libermann et C.M. Marle, *Géométrie Symplectique Bases Théoriques de la Mécanique,* Tomes 1, 2, 3, U.E.R. de Mathématiques, L.A. 212 et E.R.A. 944, 1020, 1021 du C.N.R.S.
[12] P. Molino, Géométrie de polarisations, Travaux en cours Hermann (1984) pp. 37–53.
[13] K. Nomizu, *Lie Groups and Differential Geometry* (Math. Soc. Japan, 1956).
[14] M. Postnikov, Groupes et Algèbres de Lie (Mir, Moscou, 1985).
[15] M. Puta, Some remarks on the k-symplectic manifolds, Tensors N.S. 47 (1988).
[16] B. Reinhart, *Differential Geometry of Foliatons* (Springer, 1983).
[17] N. Wallach, *Symplectic Geometry and Fourier Analysis* (Math. Sci. Press, Brookline, MA, 1977).
[18] G. Warner, Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups (Scott, Foresman and co., Glenview, 1972).